SA 2010 **Lineare Algebra I, Serie 4** Prof. Dr. Anand Dessai

Abgabe vor Donnerstag 21 Oktober 2010, 16:00

Aufgabe 1.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen sie, dass

a) $0 \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$, (hier ist 0_V das Nullelement im Vektorraum V),

b) $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$ für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 2.

Seien

$$\begin{aligned} K &:= \mathbb{Q}\left(\sqrt{-11}\right) = \left\{a + \mathrm{i} \cdot b\sqrt{11} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{C}, \\ O &:= \left\{a + \mathrm{i} \cdot b\sqrt{11} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset K. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

a) K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist und

b) O ein Unterring von K ist.

Aufgabe 3.

Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen W Untervektorräume von V sind und begründen Sie Ihre Antwort.

a) $V = \mathbb{R}^2$, $W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; 2v_1 - 3v_2 = v_1^2 + v_2^2 \right\}$.

b) $V = \mathbb{R}^3$, $W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; 2v_1 - 3v_2 = 0 \right\}$.

c) $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W := \{f \in V \mid f(x+1) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$, wobei $\mathrm{Map}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$ ist.

d) $V = \mathbb{R}^4$, $W := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; v_2 + v_4 \geq 0 \right\}$.

Aufgabe 4.

a) Rechnen Sie die komplexen Zahlen aus:

i) $(2\mathrm{i})^{-4}$,

ii) $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$,

iii) $|4 - 3\mathrm{i}|$ und

iv) z^{-1}, wobei $z = (2, \frac{\pi}{3})$ in Polarkoordinaten gegeben ist.

b) Sei $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Konjugationsabbildung, $a + \mathrm{i}b \mapsto a - \mathrm{i}b$, für alle a, $b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass c ein Isomorphismus von Körpern ist.