SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 3** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 14 octobre 2010, 16:00

Exercice 1.

Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes.

a) Montrez que $\ker \varphi$ est un sous-groupe de G.

b) Montrez que si φ est un isomorphisme de groupes, alors $\varphi^{-1} : H \to G$ est aussi un isomorphisme de groupes.

Exercice 2.

On définit sur $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ l'opération

$$(a, b) * (\tilde{a}, \tilde{b}) := (a \cdot \tilde{a}, b + a^2 \cdot \tilde{b}).$$

Démontrez que $(\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}, *)$ est un groupe. Est-il abélien?

Exercice 3.

a) Déterminez tous les diviseurs de zéro dans l'anneau $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

b) Déterminez l'inverse a^{-1} de $a = [2]$, $[3]$ et $[4]$ dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Exercice 4.

a) Construisez un corps avec exactement 4 éléments. Décrivez l'addition et la multiplication avec des tables.

b) Montrez que deux corps avec exactement 4 éléments sont isomorph.

c) Soit $R := \left\{ \frac{a}{7^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Montrez que R est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, mais pas un corps.