SA 2010 **Algèbre linéaire I, Série 2** Prof. Dr. Anand Dessai

à rendre avant le jeudi 7 octobre 2010, 16h00

Exercice 1. (4 points)

Déterminez pour chaque exemple si $(G, \star)$ est un groupe et justifiez votre réponse:

a) $G = \left\{ \dfrac{p}{q} \quad | \quad p, q \in \mathbb{Z}\,,\, q \neq 0,\, q \text{ impair} \right\}$ avec $a \star b := a + b$,

b) $G = \left\{ \dfrac{p}{q} \quad | \quad p, q \in \mathbb{Z}\,,\, p \neq 0,\, q \neq 0,\, q \text{ impair} \right\}$ avec $a \star b := a \cdot b$.

Déterminez pour chaque exemple si l'application f est un homomorphisme de groupes et justifiez votre réponse:

c) $f : (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}_{>0}, \cdot), \quad a \mapsto a^{-1}$,

d) $f : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +), \quad a \mapsto a^2$.

Exercice 2. (4 points)

Soit S_n l'ensemble des applications bijectives $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et soit $\circ$ la composition des applications. Démontrez que $(S_n, \circ)$ n'est pas un groupe abélien pour $n \geq 3$.

Exercice 3. (2+1+1 points)

Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X) := \{Y \subset X\}$ l'ensemble des parties de X. Pour $A, B \in \mathscr{P}(X)$ on définit l'opération

$$A \star B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a) Montrez que $(\mathscr{P}(X), \star)$ est un groupe abélien.

b) Quel est l'élément neutre e?

c) Quel est l'élément inverse de A?

Exercice 4. (4 points)

Démontrez que:

a) chaque groupe avec exactement 2 éléments est abélien,

b) chaque groupe $(G, \bullet)$ tel que $a \bullet a = e$ pour tout $a \in G$ est abélien.