SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Présence 22** Prof. Dr. Anand Dessai
Séance d'exercices du 2 mai 2011

Exercice 1.

Lesquelles des opérations définies ci-dessous sont des produits scalaires dans $\mathbb{R}^3$?

(a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$

(b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$

(c) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3^2y_2$

Exercice 2.

Soit V un espace vectoriel euclidien muni du produit scalaire $\langle\ ;\ \rangle$ avec norme $||\cdot||$. Montrer :

(a) $\langle v+w, v+w\rangle = ||v||^2 + 2\langle v, w\rangle + ||w||^2$, pour tout $v,\, w \in V$.

(b) $\langle v+w, v-w\rangle = ||v||^2 - ||w||^2$, pour tout $v,\, w \in V$.

Exercice 3.

Soit $V := C([0, 2\pi], \mathbb{R}) := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f \text{ continue}\}$ l'espace vectoriel réel de dimension infinie des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0, 2\pi]$ et soit

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot g(t)\,dt. \tag{1}$$

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ défini en (1) est un produit scalaire sur V .

(b) Montrer que $\langle \cos t, \cos t\rangle = 1$.

Exercice 4.

On considère l'espace vectoriel euclidien $V := C([0, 1], \mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f \text{ continue}\}$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^3}dt \le \frac{5}{2}.$$