



SP 2011

Algèbre Linéaire II, Présence 18 Prof. Dr. Anand Dessai
Séance d'exercices du 28 mars 2011

Exercice 1. (4 points)

Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 43 & -22 \\ 1 & 20 & -14 \\ 3 & 25 & -21 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer les valeurs propres de A .
- (b) Donner une base des espaces propres associés aux valeurs propres.
- (c) Déterminer une matrice $S \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que SAS^{-1} soit une matrice triangulaire.

Exercice 2. (4 points)

Soient n un nombre naturel et a un nombre entier. On note $[a]$ la classe d'équivalence de a par rapport à la relation

$$a \sim b \iff b = a + k \cdot n,$$

pour un entier k . On note

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ [0], [1], \dots, [n-1] \}$$

l'ensemble de ces classes d'équivalence (il s'agit même d'un corps). On définit les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} [a] + [b] &:= [a + b] \\ [a] \cdot [b] &:= [a \cdot b] \end{aligned}$$

- (a) Soit $n = 5$. Quels sont les éléments contenus dans la classe $[3]$?
- (b) Soit $n = 23$. Calculer
 - (i) $[10] + [13]$
 - (ii) $[15] + [87]$
 - (iii) $[4] \cdot [69]$
 - (iv) $[12] \cdot [9]$

Exercice 3. (4 points)

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $F \in \text{End}(V)$. Montrer que

$$P_F(0) \neq 0 \iff F \text{ est un isomorphisme.}$$

Ici P_F dénote le polynôme caractéristique de F .