SP 2011 **Algèbre linéaire, Présence 13** Prof.Dr. Anand Dessai

Séance d'exercices du 21 février 2011

Exercice 1.

Soit $\sigma \in S_7$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

une permutation.

a) Déterminez le nombre d'inversions de σ et $\mathrm{sign}(\sigma)$.

b) Décomposez σ en produit de transpositions.

c) La permutation σ est-elle paire ou impaire?

Exercice 2.

On a vu que sign : $S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un homomorphisme surjectif des groupes, pour lequel on peut définir le groupe alterné A_n par

$$A_n = \ker(\mathrm{sign}).$$

Décrivez les A_n pour $n = 1, 2, 3$ (par des listes de ces éléments).

Exercice 3.

Calculez les déterminants des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\alpha & -\sin\alpha & & & \\ & & & \sin\alpha & \cos\alpha & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$