SA 2010 — **Algèbre linéaire, Présence 7** — Prof.Dr. Anand Dessai

Séance d'exercices du 15 novembre 2010

Exercice 1.

Soit W_1 un plan dans $\mathbb{R}^4$ généré par les vecteurs $v_1 = (1,1,2,0)^T$ et $v_2 = (2,0,3,1)^T$. Pour lesquels des sous-espaces vectoriels ci-dessous, l'espace $\mathbb{R}^4$ est-il une somme directe de W_1 et W_2? Justifiez.

a) $W_2 = \text{span}\{(0,1,0,0)^T\}$,

b) $W_2 = \text{span}\{(3,1,5,1)^T\}$,

c) $W_2 = \text{span}\{(0,1,0,0)^T, (3,1,5,1)^T\}$,

d) $W_2 = \text{span}\{(0,1,0,0)^T, (0,0,0,1)\}$.

Exercice 2.

a) Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, et $w_1, \ldots, w_n$ appartient au $\mathbb{K}$-espace vectoriel W. Montrez qu'il existe exactement un homomorphisme $f : V \to W$ tel que $f(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$.

b) Pour $V = \mathbb{R}^3$ et $W = \mathbb{R}^2$, construisez $f : V \to W$ tel que

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Décrivez les ensembles $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$.

Exercice 3.

Soit $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ avec $W_1 = \text{span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $W_1 = \text{span}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Soit $p_i : \mathbb{R}^2 \to W_i$, $i \in \{1,2\}$ deux projections sur W_1 et W_2. Décrivez les images $p_1(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})$ et $p_2(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})$ en termes de $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

Soit $T : V \to W$ une application linéaire. Montrez que:

a) si T est injective, et les vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ sont linéairement indépendents, alors les vecteurs $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ sont linéairement indépendents.

b) si T est surjective et $v_1, \ldots, v_n$ engendre V, alors $(Tv_1, \ldots, Tv_n)$ engendre W.