SA 2010 **Algèbre linéaire I, Présence 4** Prof.Dr. Anand Dessai
Séance d'exercices du 18 octobre 2010

Exercice 1.

Soit V et W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Sur $V \times W$ on définit pour tout v, $\tilde{v} \in V$, w, $\tilde{w} \in W$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ les opérations suivantes,

$$\begin{aligned} (v,w) + (\tilde{v},\tilde{w}) &:= (v+\tilde{v}, w+\tilde{w}) \\ \lambda \cdot (v,w) &:= (\lambda v, \lambda w)\,. \end{aligned}$$

Montrez que $V \times W$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2.

Calculez les nombres complexes:
i) i^{-1}
ii) $|2+3\mathrm{i}|$.
iii) Calculez $z \cdot \tilde{z}$ en coordonées polaires, où $z = \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ et $\tilde{z} = \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 3.

Soit $\varphi : K \to L$ un homomorphisme de corps. Montrez que φ est injective.
(Indication: utilisez que $\varphi(1) = 1$.)

Exercice 4.

Soit $V := \mathbb{R}_{>0}$. On définit sur V les opérations d'addition et de multiplication, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, v, $w \in V$, par

$$\begin{aligned} v + w &:= v \cdot w \quad \leftarrow \text{ici " $\cdot$ " est la multiplication sur } \mathbb{R} \\ \lambda \bullet v &:= v^{\lambda}. \end{aligned}$$

En utilisant que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_{>0}$ on a

$$a^{\lambda} := \exp(\ln(a) \cdot \lambda) = \mathrm{e}^{\ln(a)\cdot\lambda},$$

montrez que $(V, +, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.