SA 2010 **Algèbre linéaire I, Présence 3** Prof.Dr. Anand Dessai

Séance d'exercices du 11 octobre 2010

Exercice 1.

a) Soit

+ mod 3	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

le tableau du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = (\{0,1,2\}, + \text{ mod } 3)$ composé de trois éléments, avec l'opération de la somme modulo 3. On voit que ce groupe est abélien.
Montrez que tout groupe arbitraire $(G, *)$ composé de trois éléments est abélien.

b) Soit

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

le tableau de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec la multiplication modulo 3. Montrez que $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, + \text{ mod } 3, \cdot)$ est un corps.

Exercice 2.

Montrez que $\{[2], [3], [4]\}$ est l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
Déterminez l'inverse multiplicatif de $[5]$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 3.

Sur $R := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on définit les opérations

$$\begin{aligned} + \quad &: \quad R \times R \to R, \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \cdot \quad &: \quad R \times R \to R, \quad (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2) \end{aligned}$$

Montrez que $(R, +, \cdot)$ est un anneau, mais pas un corps.