SA 2010 **Algèbre linéaire I, Présence 2** Prof. Dr. Anand Dessai

Séance d'exercices du 4 octobre 2010

Exercice 1.

a) Est-ce que $(\mathbb{N}, +)$ est un groupe?

b) Est-ce que $(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$, $x \mapsto -x$ est un homomorphisme des groupes?

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$S_n := \left\{ \sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \quad | \quad \sigma \text{ bijective} \right\}$$

l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$

a) Montrer que $(S_n, \circ)$ est un groupe par rapport à la loi de composition. S_n est appelé le groupe symétrique.

b) Combien d'éléments y-a-t-il dans S_3? Combien y en a-t-il dans S_n?

c) Est-ce que S_3 est abélien?

d) On considère, dans S_3, la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$. Quel est l'inverse de σ?

Exercice 3.

Soit $G := \{(x_1, \ldots, x_n) \quad | \quad x_i \in \{0, 1\}\}$ et soit

$$(x_1, \ldots, x_n) * (y_1, \ldots, y_n) := (z_1, \ldots, z_n)$$

avec

$$z_i := \begin{cases} 1, & \text{si } x_i = y_i, \\ 0, & \text{si } x_i \neq y_i. \end{cases}$$

Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.