SA 2010 **Algèbre linéaire I, Présence 0** Prof. Dr. Anand Dessai
Séance d'exercices du 20 septembre 2010

1 Éléments de logique, définitions

La proposition P, resp. Q ... une déclaration d'un fait, qui est soit vraie, soit fausse.

La conjonction $P \wedge Q$ ... une nouvelle proposition qui dit "P et Q".

La disjonction $P \vee Q$ ... une nouvelle proposition qui dit "P ou Q".

La négation $\neg P$ ... une nouvelle proposition qui dit "non P".

L'implication $P \Rightarrow Q$ (ou bien $Q \Leftarrow P$) ... une abbréviation pour $\neg P \vee Q$.

L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ ... une abbreviation pour $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $Q \Rightarrow P$.

La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

L'inverse de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Le quantificateur existentiel $\exists x \in \mathcal{A}$ ... "il existe (au moins) un x dans l'ensemble $\mathcal{A}$".

Le quantificateur universel $\forall x \in \mathcal{A}$ ... "pour tout x dans l'ensemble $\mathcal{A}$".

NB: Si la proposition P dépend sur des paramètres $x, n_1, n_2, \ldots n_K$, on note $P(x, n_1, n_2, \ldots, n_K)$.
Exemple d'un tel $P(n_1, n_2)$: "n_1 est divisible par n_2", pour $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

2 Règles basiques de la logique

Règles associatives

$P \wedge (Q \wedge R)$ est équivalent à $(P \wedge Q) \wedge R$.

$P \vee (Q \vee R)$ est équivalent à $(P \vee Q) \vee R$.

Règles de DeMorgan

$\neg(P \wedge Q)$ est équivalent à $(\neg P \vee \neg Q)$.

$\neg(P \vee Q)$ est équivalent à $(\neg P \wedge \neg Q)$.

Règles commutatives

$P \wedge Q$ est équivalent à $Q \wedge P$.

$P \vee Q$ est équivalent à $Q \vee P$.

Idempotent

$P \wedge P$ est équivalent à P.

$P \vee P$ est équivalent à P.

Règles distributives

$P \wedge (Q \vee R)$ est équivalent à $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

$P \vee (Q \wedge R)$ est équivalent à $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Règle de double négation

$\neg(\neg P)$ est équivalent à P.

Règles de condition

$P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg P \vee Q$.

$P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg(P \wedge \neg Q)$.

Règle de contraposition

$P \Rightarrow Q$ est équivalent à $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Règles de négation des quantificateurs

La proposition $\neg(\exists x$ tel que $P(x))$ est équivalente à $(\forall x$ on a $\neg P(x))$.

La proposition $\neg(\forall x$ on a $P(x))$ est équivalente à $\neg(\exists x$ tel que $\neg P(x))$.

La proposition $\neg(\forall x \in \mathcal{X}$ on a $P(x) \Rightarrow Q(x))$ est équivalente à $(\exists x \in \mathcal{X}$ tel que $P(x) \wedge \neg Q(x))$.

3 Proposition et preuve

Un théorème (une lemme, une proposition) est une proposition logique mathématiquement démontrée, c'est-à-dire une assertion qui a été établie comme toujours vraie au travers d'un raisonnement logique construit à partir d'axiomes de base ou d'autres propositions déjà prouvées.

La forme générale d'un théorème:

$$\text{"Soit } H\text{, alors } A\text{."} \qquad \text{c'est à dire} \qquad \text{“}H \Rightarrow A\text{”},$$

où H sont des hypothèses et A est l'assertion.

Une conjecture est une proposition logique qui est supposée être vraie, mais pour laquelle on n'a pas encore trouvé une preuve mathématique.

Une preuve (une démonstration) est un raisonnement logique qui mène à l'affirmation que $(H \Rightarrow A)$ est vrai dans **tous les cas**.

Attention, un exemple ne constitue généralement pas une preuve!

Un contre-exemple, c'est à dire l'existence d'un cas où $H \wedge \neg A$, infirme la conjecture “$H \Rightarrow A$”.

4 Types et techniques de preuve

Proposition 1: *“Pour tout $x \in \mathcal{X}$ tel que $H(x)$ on a $A(x)$.”, c'est à dire “$\forall x \in \mathcal{X}$ on a $H(x) \Rightarrow A(x)$”.*

Preuve directe: Traiter $x \in \bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$, $\bar{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} : H(x) \text{ vrai}\}$, comme le paramètre du problème. Démontrer $A(x)$.

Preuve par contraposition: au lieu de

$$\forall x \in \mathcal{X} : H(x) \Rightarrow A(x)$$

on donne une preuve directe de la proposition équivalente

$$\forall x \in \mathcal{X} : \neg A(x) \Rightarrow \neg H(x).$$

Proposition 2: *“A est vrai”.*

Preuve par contradiction (par l'absurde): On suppose que $\neg A$ est vrai et on montre que ceci mène à une contradiction.

Proposition 3: *“Il existe un $x \in \mathcal{X}$ tel que $A(x)$”, i.e. “$\exists x \in \mathcal{X}$ t.q. $A(x)$.”*

Preuve d'existence (constructive): On trouve un exemple de $x \in \mathcal{X}$ tel que $A(x)$ est vrai.

Proposition 4: *“$A(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$”.*

Preuve par récurrence (induction):
a) Prouver que $A(1)$ est vrai *(ancrage, $k = 1$)*.
b) Sous l'hypothèse de “$A(k)$ est vrai” prouver que $A(k+1)$ est aussi vrai *(pas d'induction)*.

Exercice 1.

"Soit n un entier positif, $n \in \mathbb{N}$. Si n est impair, alors n^2 est aussi impair."
a) Donnez une preuve directe.
b) Donnez une preuve par contraposition.
c) Donnez une preuve par l'absurde.
d) Donnez une preuve par induction.

Exercice 2.

Choisissez une technique de preuve adaptée au problème et prouvez:
a) $\sqrt{3}$ est irrationnel.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n + 3$ est divisible par 4.
c) Il existe un ensemble $\mathcal{A}$ unique, tel que pour chaque ensemble $\mathcal{B}$ on a $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Exercice 3.

Prouvez les règles de DeMorgan et les règles distributives de la Section 2.

Exercice 4.

Confirmez ou infirmez les règles distributives suivantes:
a) ($\exists x$ t.q. $(P(x) \vee Q(x))$) est équivalent à ($\exists x$ t.q. $P(x)) \vee (\exists x$ t.q. $Q(x)$).
b) ($\forall x$ on a $(P(x) \vee Q(x))$) est équivalent à ($\forall x$ on a $P(x)) \vee (\forall x$ on a $Q(x)$).

Exercice 5.

Prouvez "$\neg(\forall x \in \mathcal{X}$ on a $P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{X}$ t.q. $\neg P(x)$" sans utiliser les règles de négation des quantificateurs de la Section 2. Utilisez les autres règles basiques de la Section 2 et les définitions de la Section 1.

Exercice 6.

Les propositions

$$(\forall x \in \mathcal{X} \quad \exists y \in \mathcal{Y} \text{ tel que } P(x,y)) \qquad \text{et} \qquad (\exists y \in \mathcal{Y} \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{X} \text{ on a } P(x,y))$$

ne sont pas équivalentes! Pourquoi? Peut-on dire que l'une découle de l'autre?

Exercice 7.

Prouvez l'équivalence des deux expressions:
(i) "$\exists x \in \mathcal{X}$ t.q. $P(x) \Rightarrow Q(x)$"
(ii) "$(\forall x \in \mathcal{X}$ on a $P(x)) \Rightarrow \exists x \in \mathcal{X}$ t.q. $Q(x)$".