SA 2010 **Lineare Agebra I, Präsenzaufgaben 0** Prof. Dr. Anand Dessai
Übungsstunde, 20. September 2010

1 Elemente der Logik, Definitionen

Die Proposition P, resp. Q ... eine Aussage, die entweder wahr oder falsch ist.

Die Konjunktion $P \wedge Q$ ... ist eine neue Proposition "P und Q".

Die Disjunktion $P \vee Q$ ... ist eine neue Proposition "P oder Q".

Die Negation $\neg P$ ... ist eine neue Proposition "nicht P".

Die Implikation $P \Rightarrow Q$ (oder $Q \Leftarrow P$) ... ist eine Abkürzung für $\neg P \vee Q$.

Die Äquivalenz $P \Leftrightarrow Q$ ... ist eine Abkürzung für $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

Die Umkehrung der Implikation $P \Rightarrow Q$ ist die Proposition $Q \Rightarrow P$.

Die Kontraposition der Implikation $P \Rightarrow Q$ ist die Proposition $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Das Gegenteil der Implikation $P \Rightarrow Q$ ist die Proposition $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Der Existenzquantor $\exists x \in \mathcal{A}$ ... "es gibt (mindestens) ein x in der Menge $\mathcal{A}$".

Der Allquantor $\forall x \in \mathcal{A}$ ... "für alle x in der Menge $\mathcal{A}$".

NB: Falls die Proposition P von den Parametern x, n_1, $n_2 \ldots n_K$, abhängt schreibt man $P(x, n_1, n_2, \ldots, n_K)$. Beispielsweise $P(n_1, n_2)$: "n_1 ist durch n_2 teilbar", für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

2 Grundregeln in der Logik

Assoziativgesetze

$P \wedge (Q \wedge R)$ ist äquivalent zu $(P \wedge Q) \wedge R$.

$P \vee (Q \vee R)$ ist äquivalent zu $(P \vee Q) \vee R$.

Kommutativgesetze

$P \wedge Q$ ist äquivalent zu $Q \wedge P$.

$P \vee Q$ ist äquivalent zu $Q \vee P$.

Distributivgesetze

$P \wedge (Q \vee R)$ ist äquivalent zu $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

$P \vee (Q \wedge R)$ ist äquivalent zu $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Bedingungsgesetze

$P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu $\neg P \vee Q$.

$P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu $\neg(P \wedge \neg Q)$.

De Morgansche Gesetze

$\neg(P \wedge Q)$ ist äquivalent zu $(\neg P \vee \neg Q)$.

$\neg(P \vee Q)$ ist äquivalent zu $(\neg P \wedge \neg Q)$.

Idempotent

$P \wedge P$ ist äquivalent zu P.

$P \vee P$ ist äquivalent zu P.

Gesetz der doppelten Negation

$\neg(\neg P)$ ist äquivalent zu P.

Kontrapositionsgesetz

$P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Negationsgesetze der Quantoren

Die Proposition $\neg(\exists x$ so dass $P(x))$ ist äquivalent zu $(\forall x$ gilt $\neg P(x))$.

Die Proposition $\neg(\forall x$ gilt $P(x))$ ist äquivalent zu $\neg(\exists x$ so dass $\neg P(x))$.

Die Proposition $\neg(\forall x \in \mathcal{X}$ gilt $P(x) \Rightarrow Q(x))$ ist äquivalent zu $(\exists x \in \mathcal{X}$ so dass $P(x) \wedge \neg Q(x))$.

3 Proposition und Beweis

Ein Theorem (ein Lemma, eine Proposition) ist eine logische Proposition, die mathematisch gezeigt wurde. Also eine Behauptung die immer als wahr gilt, weil sie durch logische Argumente - aufgebaut auf Axiome oder schon bewiesenen Propositionen - belegt ist.

Die allgemeine Form einer Proposition:

$$\text{"Sei } H\text{, also gilt } A\text{."} \qquad \text{das heisst} \qquad \text{“}H \Rightarrow A\text{”},$$

wobei H die Hypothesen sind und A die Aussage ist.

Eine Vermutung ist eine logische Proposition, die man als wahr einstuft, wobei man noch keinen mathematischen Beweis finden konnte.

Ein Beweis ist ein logisches Schlussfolgern, das dazu führen soll, dass $(H \Rightarrow A)$ **immer** wahr ist.

Achtung, ein Beispiel bildet meistens noch keinen Beweis!

Ein Gegen-Beispiel, die Existenz eines Falls bei dem $H \wedge \neg A$ gilt, widerlegt “$H \Rightarrow A$”.

4 Beweistypen, Beweistechniken

Proposition 1: *“Für jedes $x \in \mathcal{X}$ mit $H(x)$ gilt $A(x)$.”, d.h.*
“$\forall x \in \mathcal{X}$ on a $H(x) \Rightarrow A(x)$”.

Direkter Beweis: Behandle $x \in \bar{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}$, $\bar{\mathcal{X}} = \{x \in \mathcal{X} : H(x) \text{ wahr}\}$, als den Problem-Parameter. Zeige $A(x)$.

Beweis durch Kontraposition: anstatt

$$\forall x \in \mathcal{X} : H(x) \Rightarrow A(x)$$

gibt man einen direkten Beweis für diese äquivalente Proposition:

$$\forall x \in \mathcal{X} : \neg A(x) \Rightarrow \neg H(x).$$

Proposition 2: *“A ist wahr”.*

Beweis durch Widerspruch (ad absurdum): Man nimmt an dass $\neg A$ wahr ist und zeigt, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Proposition 3: *“Es gibt ein $x \in \mathcal{X}$ so dass $A(x)$”, i.e. “$\exists x \in \mathcal{X}$ s.d. $A(x)$.”*

Existenzbeweis (konstruktiv): Man findet ein Beispiel für ein $x \in \mathcal{X}$ so dass $A(x)$ wahr ist.

Proposition 4: *“$A(k)$ ist wahr für alle $k \in \mathbb{N}$”.*

Beweis durch Induktion:
a) Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist *(Verankerung, $k = 1$)*.
b) Unter der Annahme “$A(k)$ ist wahr” beweist man, dass $A(k+1)$ auch wahr ist *(Induktionsschritt)*.

Übung 1.

"Sei n eine positive, natürliche Zahl, $n \in \mathbb{N}$. Falls n ungerade ist, ist auch n^2 ungerade."
a) Geben Sie einen direkten Beweis.
b) Geben Sie einen Beweis durch Kontraposition.
c) Geben Sie einen Beweis durch Widerspruch.
d) Geben Sie einen Induktionsbeweis.

Übung 2.

Wählen Sie eine gute Beweistechnik, und zeigen Sie:
a) $\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl.
b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $5^n + 3$ teilbar durch 4.
c) Es gibt eine einzige Menge $\mathcal{A}$, so dass für jede Menge $\mathcal{B}$ gilt $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$.

Übung 3.

Beweisen Sie die De Morgansche Gesetze und die distributivgesetze des Abschnitts 2.

Übung 4.

Verifizieren oder Falsifizieren Sie die folgenden Distributivgesetze:
a) ($\exists x$ s.d. $(P(x) \vee Q(x))$) ist äquivalent zu ($\exists x$ s.d. $P(x)) \vee (\exists x$ s.d. $Q(x)$).
b) ($\forall x$ gilt $(P(x) \vee Q(x))$) ist äquivalent zu ($\forall x$ gilt $P(x)) \vee (\forall x$ gilt $Q(x)$).

Übung 5.

Beweisen Sie "$\neg(\forall x \in \mathcal{X}$ gilt $P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{X}$ s.d. $\neg P(x)$" ohne die Negationsgesetze der Quantoren des Abschnitts 2 zu benutzen. Benutzen Sie die anderen Gesetze im Abschnitt 2 und die Definitionen im Abschnitt 1.

Übung 6.

Die Propositionen

$$(\forall x \in \mathcal{X} \quad \exists y \in \mathcal{Y} \text{ so dass } P(x,y)) \qquad \text{und} \qquad (\exists y \in \mathcal{Y} \text{ so dass } \forall x \in \mathcal{X} \text{ gilt } P(x,y))$$

sind nicht äquivalent! Warum? Kann man aus einer Proposition die andere folgern?

Übung 7.

Zeigen Sie, dass folgende Ausdrücke äquivalent sind:
(i) "$\exists x \in \mathcal{X}$ s.d. $P(x) \Rightarrow Q(x)$"
(ii) "$(\forall x \in \mathcal{X}$ gilt $P(x)) \Rightarrow \exists x \in \mathcal{X}$ s.d. $Q(x)$".