Exercice 3

a) On considère la matrice $A_n \in M(n \times n\ ,\ \mathbb{K})$ donnée par

$$A_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (-1)^{n+1}a_0 & (-1)^{n+1}a_1 & (-1)^{n+1}a_2 & (-1)^{n+1}a_3 & \cdots & (-1)^{n+1}a_{n-2} & (-1)^{n+1}a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Par exemple :

$$A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}$$

A montrer : $p_{A_n}(t) = (-1)^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$

$\hookrightarrow$ induction sur $n \geq 2$.

- Ancrage :
  on a $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}$ et donc $p_{A_2}(t) = -t \cdot (-a_1 - t) + a_0 = t^2 + a_1 t + a_0$
  $\hookrightarrow$ ok.
- Hypothèse : $p_{A_k}(t) = (-1)^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, pour tout $k \geq 2$
- Affirmation $(n \to n+1)$: $p_{A_{n+1}}(t) = (-1)^{n+1} + a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$
- Preuve : On a tout d'abord que

$$p_{A_{n+1}}(t) = \det(A_{n+1} - t \cdot E_{n+1})$$

$$= \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -t & 1 \\ (-1)^{n+2}a_0 & (-1)^{n+2}a_1 & (-1)^{n+2}a_2 & (-1)^{n+2}a_3 & \cdots & (-1)^{n+2}a_{n-1} & (-1)^{n+2}a_n - t \end{pmatrix}$$

Développons ce déterminant par rapport à la première colonne (Laplace) :

$$p_{A_{n+1}}(t) = -t \cdot \det \begin{pmatrix} -t & 1 & & & \\ 0 & -t & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ (-1)^{n+2} \cdot a_1 & & & & (-1)^{n+2} \cdot a_n - t \end{pmatrix} + (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+2} \cdot a_0,$$

et donc

$$p_{A_{n+1}}(t) = -t \cdot \det \begin{pmatrix} -t & 1 & & & \\ 0 & -t & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ (-1)^{n+2} \cdot a_1 & & & & (-1)^{n+2} \cdot a_n - t \end{pmatrix} + a_0.$$

En réarrangeant cette dernière expression, on obtient

$$p_{A_{n+1}}(t) = -t \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} -t & 1 & & & \\ 0 & -t & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ (-1)^{n+1} \cdot (-a_1) & & & & (-1)^{n+1} \cdot (-a_n) - t \end{pmatrix}}_{\in \ M(n \times n \ , \ \mathbb{K})} + a_0.$$

Grâce à l'hypothèse on obtient finalement que

$$\begin{aligned} p_{A_{n+1}}(t) &= -t \cdot \Big((-1)^n t^n + (-a_n) t^{n-1} + \ldots + (-a_2) t - a_1 \Big) + a_0 \\ &= (-1)^{n+1} t^{n+1} + a_n t^n + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \end{aligned}$$

ce qui était à démontrer.