SP 2011 **Algèbre Linéaire II, Série 14** Correction

Exercice 1

b) Soit la matrice

$$A_j := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in M(j \times j, \mathbb{K})$$

Après plusieurs essais on suppose que

$$\begin{cases} \text{pour } j \text{ pair } (j = 2k) & : & \det(A_{2k}) & = & (-1)^k \\ \text{pour } j \text{ impair } (j = 2k+1) & : & \det(A_{2k+1}) & = & (-1)^k, \end{cases} \tag{1}$$

pour $k \geq 1$.

(1) Preuve par induction : $\det(A_{2k}) = (-1)^k$, pour $k \geq 1$

- **Hypothèse** : $\det(A_{2m}) = (-1)^m$, pour $1 \geq m \geq k$
- **Affirmation (pas d'induction, Induktionsschritt)** : $\det(A_{2\cdot(k+1)}) = (-1)^{k+1}$
- **Preuve** :

$$A_{2(k+1)} = A_{2k+2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_{2k} & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\det(A_{2\cdot(k+1)}) = (-1)\cdot 1\cdot\det(A_{2k}) = (-1)\cdot\det(A_{2k}) = (-1)\cdot(-1)^k = (-1)^{k+1} \quad \checkmark$$

(2) Preuve par induction : $\det(A_{2k+1}) = (-1)^k$, pour $k \geq 1$

analogue

Remarque : on peut trouver d'autres formules plus générales que (1) avec lesquelles il n'y a pas besoin de distinguer plusieurs cas (ici on a différents cas suivant que le nombre j de lignes de la matrice est pair ou impair)

Exercice 3

b) il faut distinguer deux cas :

(1) si AB est inversible : utiliser la Proposition 3.59

(2) si AB n'est pas inversible : Ecrivons

$$A = SE_rT \qquad \text{et} \qquad B = \tilde{S}E_{\tilde{r}}\tilde{T},$$

où $S; T, \tilde{S}, \tilde{T}$ sont des produits de matrices élémentaires. On procède ensuite en plusieurs étapes. On montre que :

1. pour toute matrice B, on a :

$$(E_rB)^\sharp = B^\sharp \cdot (E_r^\sharp)$$

2. pour toute matrice B et pour toute matrice élémentaire C, on a :

$$(CB)^\sharp = B^\sharp \cdot (C^\sharp)$$

3. pour toutes matrices A et B on a (en utilisant 1. et 2.) :

$$(AB)^\sharp = B^\sharp \cdot (A^\sharp)$$

c) on distingue deux cas :

(1) si A est inversible : par le Corollaire 3.60 on a

$$A^\sharp \overset{\text{Kor. 3.60}}{=} \det(A) \cdot A^{-1}.$$

Et donc :

$$\det(A^\sharp) = \det(\det(A) \cdot A^{-1}) = (\det(A))^n \cdot \det(A^{-1}) = (\det(A))^n \cdot \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}$$

(2) si A n'est pas inversible, i.e. $\det(A) = 0$. Il faut montrer que $\det(A^\sharp) = 0$:

Ecrivons $A = SE_rT$, o S et T sont des produits de matrices lmentaires, et $r < n$. Ainsi, en utilisant la partie **b**), on a :

$$A^\sharp = T^\sharp \cdot E_r^\sharp \cdot S^\sharp$$

et donc

$$\det(A^\sharp) = \det(T^\sharp) \cdot \underbrace{\det(E_r^\sharp)}_{=0} \cdot \det(S^\sharp) = 0 \qquad \checkmark$$