Echéance : 13 mai, à midi

1) Appliquez la méthode de Gram–Schmidt sur l'intervalle $[0, \infty)$ avec la fonction poids $w(x) = e^{-x}$ pour trouver les trois premiers polynômes de Laguerre orthonormés.

2) (Intégration de Gauss–Laguerre) Le théorème 4.5. peut être généralisé au calcul d'intégrales de la forme $I := \int_a^b f(x)w(x)dx$ avec $w(x) \not\equiv 1$: la seule formule de quadrature (8.2) qui possède le degré de précision $2n - 1$ (c'est–à–dire qui calcule I exactement pour $f =$ polynôme de degré $\leq 2n-1$) est alors la formule interpolatoire correspondant aux zéros du n–ième polynôme orthogonal relativement à $w(x)$, et les poids sont

$$w_k = \int_0^\infty L_k(x)w(x)dx,$$

où les $L_k(x)$ dénotent les polynômes de Lagrange par rapport aux noeuds x_k.

a) Calculez les noeuds x_k pour $w(x) = e^{-x}$ (polynômes orthogonaux = polynômes de Laguerre) pour $n = 1,\ 2$;

b) calculez les poids w_k correspondants;

c) utilisez la formule de quadrature correspondante pour intégrer exactement

$$\int_0^\infty (2x^3 - x + 7)e^{-x}dx;$$

d) donnez des approximations de

$$\int_0^\infty \cos(x)e^{-2x}dx \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx.$$

3) Prouvez que les poids d'une formule de Gauss sont positifs: $w_k > 0 \ \forall\ k$. (Indication: appliquez la formule à la fonction

$$\phi_k(x) := \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)^2.\Big)$$