Analyse numérique II Série 10 SP 2009

Echéance: 6 mai, à midi

1) Une fonction $f(x)$ dérivable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ peut être représentée par sa <u>série de Fourier</u>:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{$*$}$$

où les c_n sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

La règle du trapèze est particulièrement indiquée pour le calcul approché des c_n. Supposons que f soit 2π–périodique, que $\widehat{c}_n$ soit la valeur approchée de c_n par la formule du trapèze avec $h = \frac{2\pi}{N}$, et que la série $(*)$ soit absolument convergente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Prouver que $\widehat{c}_n$ est égal à la somme de tous les coefficients <u>exacts</u> de f dont l'indice diffère de n par un multiple entier de N:

$$\widehat{c}_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{n+lN} = \ldots + c_{n-2N} + c_{n-N} + c_n + c_{n+N} + c_{n+2N} + \ldots$$

(En anglais, cette relation est appelée "<u>aliasing</u>"; elle est fondamentale dans les applications pratiques des séries de Fourier. Elle donne par exemple l'erreur commise en approchant c_n par $\widehat{c}_n$:

$$\widehat{c}_n - c_n = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} c_{n+lN}.)$$

Indication (à prouver):

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N} k(m-n)} = \begin{cases} N, & \text{si } m \equiv n \bmod N; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) Prouver que la première colonne du schéma de Romberg appliqué à l'approximation d'une quantité I par une expression de la forme

$$T(h) = I + C_1(h^2) + O(h^4) = I + O(h^2)$$

donne une séquence de nombres approchant I avec une erreur $O(h^4)$. Généraliser pour les colonnes suivantes.