Echéance: 29 avril, à midi

1) Si f est $(2m+2)$–fois continûment dérivable sur $[a,b]$, la formule d'Euler–MacLaurin peut s'écrire

$$T(h) - \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \frac{B_{2i}}{(2i)!} h^{2i} \left[f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a) \right] + \frac{h^{2m+2}(b-a)B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi), \text{ pour un } \xi \text{ avec } a \le \xi \le b.$$

En appliquant cette formule aux fonctions $g(x) := 1+x$ et $g(x) := (1+x)^2$, trouvez des formules pour les sommes

$$\sum_{k=1}^{n} k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

2) Ecrire un programme calculant des approximations $T(h)$ successives de $I := \int_a^b f(x)dx$ par la règle du trapèze pour $h := b-a$ et les h obtenus par division successive par 2. Utiliser la relation

$$T(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}[T(h) + M(h)]. \tag{4.7}$$

Facultatif: extrapoler vers $h = 0$ selon la méthode de Romberg.
Exemples test: $\int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln(10)$; $\int_0^1 x^{3/2} dx = 0.4$.