

- 1) Etablissez la formule de Newton–Cotes pour $n = 3$ (4 points)

$$Q_3 = \frac{3h}{8} [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3], \quad h = \frac{b-a}{3},$$

(formule des 3/8 de Newton) et prouvez que son degré de précision est $m = 3$.

- 2) Montrez que lorsque l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$ est calculée par la règle de Simpson, l'erreur est nulle. Trouvez une généralisation à d'autres intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et utilisez-la pour prouver que la règle de Simpson est exacte pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx$.

- 3) Soit $P_2(x)$ le polynôme quadratique interpolant $f(x)$ entre $x = 0$, h et $2h$. Utilisez le pour obtenir une formule d'intégration numérique $I(h)$ pour $I = \int_0^{3h} f(x)dx$. Utilisez un développement de Taylor de $f(x)$ pour prouver que l'erreur peut s'écrire

$$I - I(h) = \frac{3}{8}h^4 f'''(0) + O(h^5).$$