Echéance: 1er avril, à midi (et ce n'est pas un poisson!)

1) Prouver la formule

$$n!f[0,1,...,n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i,$$

avec $f_i := f(i)$.

2) Interpolation de Newton entre points équidistants

Prouvez: pour les points équidistants $x_i = x_0 + ih$, la formule d'interpolation de Newton devient, après le changement de variable $s = \frac{x-x_0}{h}$ (s = distance de x à x_0 mesurée en multiples de h):

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{s}{i} \Delta^i f_0,$$

où Δ est l'opérateur aux différences finies progressives défini par:

$$\begin{aligned}
\Delta^0 f_i &= f(x_i) = f_i \\
\Delta f_i &= f_{i+1} - f_i \\
\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \\
\Delta^{k+1} f_i &= \Delta(\Delta^k f_i) = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i
\end{aligned}$$

et

$$\binom{s}{i} := \frac{s(s-1)\dots(s-i+1)}{i!}, \qquad \underline{s \in \mathbb{R}}.$$

Indication: prouvez tout d'abord que pour ces points équidistants

$$f[x_0, x_1, \dots, x_i] = \frac{\Delta^i f_0}{i!h^i}.$$

3a) Prouvez que les $L_i'(x_i)$ intervenant dans les t_i de la formule de Hermite de la série 5 sont aussi égaux à

$$L_i'(x_i) = \frac{\lambda_i}{2} L''(x_i).$$

(Indication: écrivez $L_i(x) = \lambda_i \frac{L(x)}{x - x_i}$.)

b) Montrez que, si les points d'interpolation sont les points de Čebyšev de première espèce, alors $t_i = -\frac{\cos\phi_i}{(\sin\phi_i)^2}$, et que par conséquent la formule barycentrique pour le polynôme d'interpolation de Hermite peut s'écrire

$$P_{2n+1}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left\{ \frac{1 - x\cos\phi_i}{(x - \cos\phi_i)^2} f_i + \frac{(\sin\phi_i)^2}{x - \cos\phi_i} f_i' \right\}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1 - x\cos\phi_i}{(x - \cos\phi_i)^2}}.$$