Analyse numérique II — Série 5 — SP 2009

Echéance: 25 mars, à midi

1) Prouvez la relation de récurrence pour différences divisées

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

en exprimant les différences suivant Lagrange:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i, \qquad \lambda_i = 1 \Bigg/ \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)\ .$$

2) a) Calculez (à la main, avec des fractions) la valeur en $x = 1$ du polynôme de degré 3 interpolant $f(x) = \frac{-48}{x+8}$ entre les points $x_i = -4$, 0, 4 et 8 avec la formule de Neville;

b) comme a) mais selon Newton.

3) Interpolation de Hermite simple. Une version plus raffinée du problème d'interpolation consiste à chercher un polynôme P_{2n+1} qui interpole f et sa dérivée f' entre $x_0, \ldots, x_n$:

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \qquad P'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{$*$}$$

Nous allons voir que la solution existe et est donnée par

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [L_i(x)]^2 \left\{ \big(1 + t_i(x - x_i)\big) f_i + (x - x_i) f'_i \right\} \tag{$**$}$$

où $t_i = -2L'_i(x_i)$ et les $L_i(x)$ sont les polynômes de Lagrange.

a) Montrez que les $L'_i(x_i)$ apparaissant dans les coefficients t_i peuvent s'écrire

$$L'_i(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j};$$

b) vérifiez que le polynôme $(**)$ est bien de degré $2n + 1$ et satisfait aux conditions d'interpolation $(*)$;

c) démontrez que le polynôme d'interpolation de Hermite est unique;

d) obtenez la formule barycentrique de l'interpolation de Hermite.