Analyse numérique II — Série 4 — SP 2009

Echéance: 18 mars, à midi

Exercice 1.

Dans la Série 2, vous avez vu le contre-example de Runge de function $f(x) = \dfrac{1}{1+36x^2}$, dont l'interpolant polynomial

$$P_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{x-x_i} f(x_i)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{x-x_i}}, \qquad \lambda_i = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} (x_i - x_k)}, \tag{1}$$

avec les points $\{x_i\}$ équidistants dans l'intervalle $I = [-1, 1]$ ne converge pas vers $f(x)$ quand $n \to \infty$.

Comme la propriété d'interpolation, $P_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$, est vérifiée pour un choix arbitraire des $\lambda_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il est naturel d'essayer dans ce cas d'autres poids que les λ_i. On va les dénoter β_i. L'interpolant $P_n(x)$ devient alors une fonction rationnelle:

1) Pour un choix arbitraire des $\beta_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 0, \dots, n$, montrez que $P_n(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes. Quel est le degré maximal de $p(x)$, resp. $q(x)$?

2) On interpole alors une fonction $f(x) \in C^0([-1, 1])$ par un interpolant rationnel. Le principal souci est que pour certains $\{\beta_i\}$ arbitraires du point 1), $P_n(x) \notin C^0([-1, 1])$, car il peut y avoir un pôle dans $[-1, 1]$, c'est à dire un $\hat{x}$ pour lequel $q(\hat{x}) = 0$ et $p(\hat{x}) \neq 0$. Montrez que si on a $q(x) \neq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$ alors on a forcément $\operatorname{sign}(\beta_i) = -\operatorname{sign}(\beta_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$ (signes alternés des $\{\beta_i\}$). Procédez de la façon suivante:

   a) Montrez que les $\{\lambda_i\}$ ont des signes alternés,

   b) Exprimez les β_i comme des multiples des λ_i,

   c) La condition $\operatorname{sign}(\beta_i) = -\operatorname{sign}(\beta_{i+1})$ est-elle nécessaire, suffisante ou nécessaire et suffisante? Pourquoi?

3) Montrez que, si les $\{\beta_i\}$ ne dépendent pas de $f(x)$, l'application $\Pi_n : f(x) \to P_n(x)$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$, est une application linéaire.

Exercice 2.

Dans l'article *J-P. Berrut: Rational functions for guaranteed and experimentally well conditioned global interpolation, Comput. Math. Appl. 15, 1988, pp. 1–16*, sont proposées deux suites de poids (en valeur absolue, le signe des β_i alterne comme dans l'exercice 1 2c)):

$$1 \;\; 1 \;\; \dots \;\; 1 \;\; 1, \tag{2}$$

$$1/2 \;\; 1 \;\; \dots \;\; 1 \;\; 1/2, \tag{3}$$

indépendamment de la suite de points $\{x_i\}$. Les interpolants correspondants sont bien conditionnés, mais la convergence $P_n(x) \to f(x)$ pour $n \to \infty$ est lente pour les points équidistants, $\mathcal{O}(h)$ pour la première suite, $\mathcal{O}(h^2)$ pour la seconde, $h = 2/n$.

Ceci a été amélioré dans l'article *M. S. Floater, K. Hormann: Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation, Numer. Math. 107, 2007, pp.*

315–331. On introduit $d \in \mathbb{N}$, $d \in [0, n]$ et on propose, pour les $\{x_i\}$ équidistants, les poids correspondants

$$\beta_i = \frac{(-1)^{i-d}}{2^d} \sum_{j=\max(0,i-d)}^{\min(n-d,i)} \binom{d}{i-j}. \tag{4}$$

Les estimations de convergence dans la "max-norme" $\|g\|_\infty \equiv \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$ sont alors

$$\begin{aligned} \|P_n - f\|_\infty &\leq h^{d+1}(b-a)\frac{\|f^{(d+2)}\|_\infty}{d+2} && \text{si } (n-d) \text{ est impair,} \\ \|P_n - f\|_\infty &\leq h^{d+1}\left((b-a)\frac{\|f^{(d+2)}\|_\infty}{d+2} + \frac{\|f^{(d+1)}\|_\infty}{d+1}\right) && \text{si } (n-d) \text{ est pair,} \end{aligned}$$

pour $f \in C^{d+2}[a,b]$ et $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Cette méthode d'interpolation est donc d'ordre $\mathcal{O}(h^{d+1})$. Pour $d = 0$ et $d = 1$ on retrouve respectivement les β_i de (2) et (3).

Prenez les points équidistants $x_k = -1 + 0.125 \cdot k$, $k = 0, \ldots, 16$, dans l'intervalle $[-1, 1]$, $n = 16$ et deux fonctions

a) $f(x) = e^{2x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 36x^2}$.

Pour ces données:

1) Ecrivez un programme qui calcule le vecteur des poids β_i de (4), pour $d = 0, 1, \ldots, n$.

2) Modifiez votre programme de la Série 2 en introduisant les poids β_i de Floater et Hormann au lieu des λ_i.

3) Dans une boucle sur $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ évaluez expérimentalement (comme dans la Série 2) l'erreur
$$\mathrm{Err}(d) = \max_{\bar{x}_k} |P_n(\bar{x}_k) - f(\bar{x}_k)|,$$
avec $\bar{x}_k = -1 + 0.02 \cdot k$, $k = 0, \ldots, 100$.

4) Pour les deux fonctions en a) et b), mettez graphiquement en évidence la dépendance de $\mathrm{Err}(d)$ par rapport à d. Voit-on que $\mathrm{Err}(d)$ se comporte selon l'ordre $\mathcal{O}(h^{d+1})$? Expliquez pourquoi et proposez une meilleure expérience pour étudier le comportement selon $\mathcal{O}(h^{d+1})$.