Analyse numérique II Série 3 SP 2009

Echéance: 11 mars, à midi

1) Considérez l'interpolation cubique (avec interpolation dans l'intervalle du centre, comme dans le cours) dans une table de e^x, $0 \leq x \leq 2$, et un pas $h = .01$. Bornez l'erreur d'interpolation totale (c'est–à–dire avec les erreurs d'arrondi), en admettant que les valeurs de la table sont données avec 5 chiffres significatifs.

2) Considérez l'interpolation linéaire dans une table de racines carrées, avec $10 \leq x \leq 999$, $h = 1$. Bornez l'erreur et l'erreur relative.

3) Considérez la fonction e^x sur $[0, b]$ et son approximation par un polynôme d'interpolation. Pour $n \geq 1$, soit $h = b/n$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, et soit $P_n(x)$ le polynôme de degré n interpolant e^x entre les noeuds $x_0, \ldots, x_n$. Prouvez que

$$\max_{0 \leq x \leq b} |e^x - P_n(x)| \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

4) Considérez le problème de trouver un polynôme quadratique $p(x)$ pour lequel

$$p(x_0) = y_0, \qquad p'(x_1) = y_1' \qquad p(x_2) = y_2,$$

avec $x_0 \neq x_2$ et $\{y_0, y_1', y_2\}$ donnés. Supposant que les noeuds x_0, x_1 et x_2 sont réels, quelles conditions doivent être satisfaites pour qu'un tel $p(x)$ existe et soit unique. Un problème d'interpolation dans lequel les valeurs de certaines dérivées de l'interpolant sont imposées est appelé problème d'interpolation de Hermite-Birkhoff.