Echéance: 25 février, à midi

1) Une formule pour les λ_i: prouvez

$$\lambda_i = \frac{1}{L'(x_i)},$$

où $L(x) := (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$.
Indication: utilisez la définition habituelle de la dérivée.

2) La formule ci–dessus peut être utilisée pour calculer les poids de la formule barycentrique pour les points d'interpolation de Čebyšev de première espèce sur $[-1, 1]$. Ces derniers sont définis comme les zéros du polynôme de Čebyšev de première espèce que l'on obtient en effectuant le changement de variable $\phi = \arccos x$ ($\Longleftrightarrow x = \cos\phi$) dans la fonction $\cos n\phi$:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Dans ce cas, $L(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$.
   a) déterminez les zéros de $L(x)$;
   b) calculez les poids λ_i pour ces points ainsi que les poids simplifiés λ_i^*;
   c) donnez la formule barycentrique pour les points de Čebyšev de première espèce.

3) interpolation SINC: on peut utiliser l'idée de Lagrange pour interpoler entre des points équidistants sur tout l'axe réel. A cet effet, remarquons que la fonction

$$\mathrm{SINC}(x) := \frac{\sin x}{x}$$

s'annule en des points équidistants de π:

$$\mathrm{SINC}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 0, & x = l\pi,\ l \in \mathrm{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

   a) construisez à partir de $\mathrm{SINC}(x)$ une fonction qui prenne la valeur 1 en zéro et 0 aux multiples de h;
   b) construisez une fonction qui prenne la valeur 1 en $x_k = kh$ et 0 en tous les autres multiples de h;
   c) trouvez une combinaison linéaire $C(x)$ (on l'appelle interpolant cardinal) des fonctions déterminées en 2) qui interpole une fonction quelconque f entre les points x_k;

tourner svp.

d) en utilisant la formule du sinus d'une somme, mettez en évidence un sinus devant la somme ci–dessus; la formule ainsi obtenue est–elle plus ou moins chère à évaluer que la formule originelle?

e) sachant que la formule est aussi valable pour la fonction identiquement 1, donnez la formule barycentrique de l'interpolant cardinal.

Remarque: les interpolants SINC sont particulièrement efficients pour l'approximation (même sur un intervalle fini ou semi-infini, après transformation préliminaire) de fonctions faiblement singulières aux extrémités de l'intervalle.