Echéance: 17 décembre, à midi

1) Prouver le lemme sur les différences divisées utilisé dans le cours:

a) si f est continûment différentiable dans $[x_0, x_1]$:

$$f[x_0, x_1] = f'(\xi) \qquad \text{pour un } \xi \in [x_0, x_1];$$

b) si f est deux fois continûment différentiable dans le plus petit intervalle I contenant x_0, x_1 et x_2:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2} f''(\zeta) \qquad \text{pour un } \zeta \in I.$$

2) a) Appliquer la méthode de Newton à la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & x \leq 0, \end{cases}$$

avec zéro $s = 0$. Quel est le comportement des itérés? Convergent–ils, et, si oui, à quelle vitesse?

b) faire la même chose pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2}, & x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{x^2}, & x \leq 0. \end{cases}$$

3) La méthode de Newton calcule récursivement le zéro de la tangente à la fonction donnée. On peut affiner le processus et remplacer la tangente par l'hyperbole d'équation

$$h(x) = \frac{a}{x+b} + c$$

ayant en x_k les même valeur, pente et courbure que f. Le nouvel itéré x_{k+1} est alors de nouveau déterminée comme le zéro de $h(x)$.

a) Prouver que l'itération correspondante est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)^2}};$$

on l'appelle *formule d'itération de Halley*;

b) démontrer que la méthode de Halley appliquée à l'équation $f(x) = 0$ est la méthode de Newton appliquée à l'équation $\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}} = 0$;

c) démontrer que c'est une méthode à convergence cubique.