Analyse numérique I | Série 10 | SA 2008

Echéance: 3 décembre, à midi

1) On veut calculer $\sqrt{5}$ en résolvant l'équation $f(x) = x^2 - 5 = 0$ par la méthode d'itération à un point. Pour chacune des fonctions d'itération ci–dessous, déterminez si la méthode converge ainsi que l'ordre et la vitesse de convergence:
   a) $F(x) = x^2 + x - 5$;
   b) $F(x) = 5/x$;
   c) $F(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$;
   d) comme a), mais en multipliant d'abord $f(x)$ par une constante c,
   $$F(x) = x + c(x^2 - 5),$$
   et déterminant les valeurs de c pour lesquelles l'itération converge.

2) Pour trouver un zéro de $f(x)$ par itération, réécrivez l'équation comme $\big($voir (2.2) dans le cours$\big)$
   $$x = x + cf(x) = F(x)$$
   pour une constante $c \neq 0$. Si s est un zéro de f et si $f'(s) \neq 0$, comment faut–il choisir c pour que la suite $x_{k+1} = F(x_k)$ converge rapidement vers s. Ce résultat est–il intéressant en pratique?

3) La méthode de Newton peut être considérée comme une méthode d'itération à un point avec $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Déterminez l'ordre et le facteur de convergence.

4) L'équation $x^2 = c$, $c > 0$, dont $\sqrt{c}$ est la solution, peut s'écrire
   $$x = \frac{c}{x}; \qquad (*)$$
   a) montrez que (si $x_0 \neq \sqrt{c}$) l'itération ordinaire appliquée à $(*)$ ne produit jamais une suite convergeant vers $\sqrt{c}$;
   b) prouvez que l'itération d'Aitken–Steffensen appliquée à $(*)$ converge pour toute valeur de départ $x_0 > 0$.