Echéance : 26 novembre, à midi

Comme nous l'avons vu au cours, une méthode numérique pour la résolution d'une équation nonlinéaire $f(x) = 0$ construit une suite $\{x_k\}$ d'abcisses convergeant vers le zéro s. Une propriété de toute méthode est son <u>ordre</u>, défini comme le plus grand nombre p tel que

$$|x_{k+1} - s| \leq C|x_k - s|^p, \tag{1}$$

pour une constante C. La présente série est consacrée à la détermination empirique de p.

Supposons que s soit connue (p. ex. en appliquant une première fois la méthode) et que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = K, \qquad e_k := |x_k - s|,$$

si bien que pour k "assez grand" on ait en plus de (1)

$$e_{k+1} \approx K e_k^p. \tag{2}$$

On peut alors estimer p en divisant (2) pour k et $k-1$ (pour éliminer K) et prenant le logarithme:

$$\log \frac{e_{k+1}}{e_k} \approx p \log \frac{e_k}{e_{k-1}}$$

ou

$$p \approx \frac{\log \frac{e_{k+1}}{e_k}}{\log \frac{e_k}{e_{k-1}}}.$$

Ecrivez un programme qui résolve une équation par la méthode du point fixe

$$x = F(x)$$

et détermine l'ordre de convergence pour trois différentes F:

1) $F(x) = x - f(x)/50$;
2) $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ (méthode de Newton);
3) $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \dfrac{1}{1 - \dfrac{f(x)f''(x)}{2\left[f'(x)\right]^2}}$ (méthode de Halley).

Testez votre programme avec les équations et les points de départ

a) $5x^7 + 2x = 1$, $x_0 = -1$;
b) $\operatorname{arsinh} x = 2$, $x_0 = -3$.

Stoppez l'itération lorsque l'erreur e_{k+1} devient inférieure à 10^{-8}, l'annulation provoquant ensuite un calcul imprécis de p.