Analyse numérique I — Série 8 — SH 2008

Echéance: 19 novembre, à midi

Exercice 1.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice régulière. Montrez que la factorisation QR de la matrice $\mathbf{A}$ est unique aux signes près.

Indications: montrez que :

a) l'inverse d'une matrice triangulaire ($\triangle$) supérieure est $\triangle$ supérieure;

b) le produit de matrices $\triangle$ supérieures est une matrice $\triangle$ supérieure;

c) toute matrice orthogonale et $\triangle$ supérieure $\mathbf{S}$ est forcément diagonale avec ± 1 sur la diagonale [considérez chaque colonne de $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$].

Peut-on obtenir l'unicité (aux signes près) de la factorisation $\mathbf{QR}$ pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, de rang maximal, $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n$? Pourquoi?

Exercice 2.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice régulière. La factorisation LR du cours (dite "LU de Doolittle") peut être représentée par la factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{U}$, en posant $\mathbf{R} = \mathbf{DU}$. Ici, on suppose que $\mathbf{L} = \{\ell_{ij}\}_{i,j=1}^n$ est une matrice $\triangle$ inférieure unité, $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^n$ une matrice diagonale et $\mathbf{U} = \{u_{ij}\}_{i,j=1}^n$ une matrice $\triangle$ supérieure unité.

N.B.: en posant $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{LD}$ et $\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$ on obtient une autre factorisation LR, dite "LU de Crout".

a) Montrez l'unicité de la factorisation **LDU**.

b) Supposez qu'on connaisse déjà les $(k-1)$ premières colonnes des matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{D}$ et les $(k-1)$ premières lignes de la matrice $\mathbf{U}$. Donnez les formules pour calculer d_{kk}, ℓ_{ik}, $i = k, \ldots, n$, et u_{kj}, $j = k, \ldots, n$.
N.B.: ces formules pour d_{kk}, ℓ_{ik} et u_{kj} sont à la base de l'algorithme de calcul de la factorisation **LDU**, en une boucle sur $k = 1, \ldots, n$.

c) Soit $\mathbf{A}$ une matrice particulière, dite "avec structure en flèche",

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \star & & & \star \\ & \star & & \star \\ & & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

où les $\star$ représentent tous les éléments non-zéros possibles de $\mathbf{A}$ (les autres éléments sont nuls).

En utilisant les formules de b), montrez par récurrence que les facteurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ de la factorisation **LDU** sont aussi structurés "en flèche", notamment

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \star & & & \\ & \star & & \\ & & \star & \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \star & & & \star \\ & \star & & \star \\ & & \star & \star \\ & & & \star \end{pmatrix}.$$

N.B.: ce résultat est utilisé lors de la factorisation LU des matrices $\mathbf{A}$ qui contiennent un grand nombre de zéros (dites "matrices creuses", "sparse matrices" en anglais).