Exercice 1.

Déterminez à la main toutes les solutions $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème de minimisation

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^2} \|\mathbf{Ay} - \mathbf{b}\|_2$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 12 \\ 0 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Formulez les équations normales et résolvez-les par la factorisation de Cholesky.

b) Résolvez par la factorisation QR de $\mathbf{A}$.

c) Comparez les matrices triangulaires supérieures de a) et b), ie. le facteur $\mathbf{L}^T$ de Cholesky et la matrice $\mathbf{R}$ de la factorisation QR.

Les décompositions ne font intervenir que des nombres entiers!

Exercice 2.

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ une matrice quelconque, $m \geq n$.

a) Montrez que $\ker(\mathbf{A}) = \ker(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$.

b) Montrez que $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$.

c) Exprimez le problème aux équations normales

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \tag{1}$$

comme la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ sur l'image de $\mathbf{A}$ (par rapport au produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^m$).

d) Déduisez de c) qu'il existe au moins une solution $\mathbf{x}$ au problème (1) et montrez que cette solution est unique si et seulement si $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$.