Analyse numérique I — Série 5 — SH 2008/2009

Echéance: 29 octobre, à midi

1) Déterminez si les matrices

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont définies positives ou non. (Indication: si nécessaire, complétez les carrés!)

2) Montrez: si $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, où $\mathbf{L}$ est réelle et régulière, alors $\mathbf{A}$ est symétrique et définie positive.

3) Nous avons vu dans le cours la *méthode de Cholesky*, qui factorise toute matrice réelle, symétrique et définie positive en un produit $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$, où $\mathbf{L}$ est triangulaire inférieure (le système $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ peut alors être résolu par introductions avant et arrière). En fait, on peut aussi résoudre de tels systèmes avec la méthode de Gauss. Celle–ci peut toujours s'appliquer sans recherche de pivot! Prouvez cette dernière assertion:

a) soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ symétrique définie positive. Démontrez que tous les éléments de la diagonale sont strictement positifs, càd. $a_{ii} > 0$. Ceci prouve que a_{11} peut être utilisé comme pivot dans le premier pas.

b) écrivez la matrice $\mathbf{A}^{(2)}$ résultant de l'élimination de x_1 des équations # 2 à n comme

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{\mathbf{A}}^{(2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

et montrez que $\widehat{\mathbf{A}}^{(2)}$ est symétrique et définie positive. Cette procédure peut être poursuivie par induction pour tous les pas du processus d'élimination, justifiant l'existence de pivots non–nuls à chaque pas.

Indication: pour prouver que $\widehat{\mathbf{A}}^{(2)}$ est définie positive, prouvez tout d'abord que

$$\sum_{i,k=2}^{n} a_{ik}^{(2)} x_i x_k = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k - a_{11} \left[x_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{k1}}{a_{11}} x_k \right]^2$$

pour tout $x_1, x_2, \dots x_n$. Pour prouver que $\mathbf{x}^T \widehat{\mathbf{A}}^{(2)} \mathbf{x} > 0$ pour tout vecteur $\mathbf{x} = [x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, ajoutez à ce dernier la composante $x_1 = -\sum_{k=2}^{n} a_{k1} x_k / a_{11}$ et utilisez le fait que $\mathbf{A}$ est définie positive.

Remarquons cependant que la méthode de Gauss donne une factorisation $\mathbf{L}\mathbf{R}$ où $\mathbf{R} \neq \mathbf{L}^T$: on perd la symétrie. De plus, cela coûte deux fois plus cher.