Analyse numérique I Série 4 SH 2008/2009

Echéance: 22 octobre, à midi

1) Ecrivez un programme MATLAB résolvant des systèmes d'équations linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ de matrice $\mathbf{A}$ régulière. Le programme effectuera les opérations suivantes:
   a) factorisation LR de $\mathbf{A}$, par la commande [L,R] = lu(A);
   b) contrôle que $\mathbf{LR} = \mathbf{A}$;
   c) calcul de la condition de $\mathbf{A}$ dans la norme spectrale, commande cond(A);
   d) solution de chacun des systèmes en résolvant successivement $\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{Rx} = \mathbf{c}$ par les commandes c = L\b et x = R\c.

   Testez votre programme avec les systèmes suivants:
   a) le système du problème 3) de la série 3, et le système de même matrice $\mathbf{A}$ et de membre de droite $\mathbf{b} = [2, 4, 8]^T$;
   b) les systèmes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ avec

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 17 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} -4 \\ 1.5 \\ 5 \\ -5 \\ 2.5 \end{pmatrix}.$$

2) **Méthode d'itération de Jacobi.** Pour résoudre le système linéaire

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

on peut effectuer les itérations suivantes

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

avec $\mathbf{x}^{(0)}$ une approximation initiale donnée de $\mathbf{x}$ et les matrices $\mathbf{D}$ et $\mathbf{Q}$ défines par

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{D} - \mathbf{A}.$$

Programmez cette méthode en MATLAB pour $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} n & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \vdots \\ 2n \end{pmatrix}, \qquad n = 10, 20, \ldots .$$

a) Déterminez une approximation de la solution exacte $\mathbf{x}$ en arrêtant l'itération lorsque $\|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{b}\|_\infty \leq tol$, où *tol* est une tolérance donnée, p. ex. $tol = 10^{-6}$.

b) Calculez la solution exacte $\mathbf{x}$ (en MATLAB x=A\b) et étudiez l'erreur $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty$ en fonction du nombre d'itérations.

c) Calculez le rayon spectral de la matrice $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q}$: $\varrho = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{Q})|$.