

- 1) a) Montrez que l'équivalence des normes vectorielles implique l'équivalence des nombres de condition pour les normes d'opérateur, dans le sens que pour toute paire de nombres de condition κ_* et κ_+ il existe deux constantes ϵ_1 et ϵ_2 telles que $\epsilon_1 \kappa_+(\mathbf{A}) \leq \kappa_*(\mathbf{A}) \leq \epsilon_2 \kappa_+(\mathbf{A})$ pour toute matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.
- b) Quelles sont les constantes ϵ_1 et ϵ_2 pour la paire $\{\kappa_1, \kappa_2\}$ de l'exercice 2 de la série précédente ?
- 2) Supposez que les variables $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ à déterminer au moyen d'une expérience physique forment la solution exacte du système $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ avec

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

mais qu'à cause d'erreurs de mesure on obtienne à la place de \mathbf{A} et \mathbf{b}

$$\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

- a) trouvez $\Delta\mathbf{A}$ et $\Delta\mathbf{b}$;
- b) trouvez $\mathbf{x} =$ solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;
trouvez $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} =$ solution de $(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ (p.ex. par élimination de Gauss);
- c) calculez \mathbf{A}^{-1} et $\kappa_\infty(\mathbf{A})$;
- d) vérifiez le théorème de la perturbation relative de la solution dans ce cas (pour $\|\cdot\|_\infty$)
- 3) Considérez le système linéaire

$$\begin{aligned} 12x_1 + 2x_2 + x_3 &= 38 \\ 2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= 32 \end{aligned}$$

et vérifiez que sa solution est donnée par $x_1 = 1$, $x_2 = 12$, $x_3 = 2$.

- a) utilisant l'arithmétique à virgule flottante à quatre décimales avec arrondi, résolvez le système par élimination de Gauss sans recherche de pivot (sans ordinateur);

- b) répétez a), mais en faisant usage de la recherche de pivot partielle.
Soyez attentifs à arrondir tous les nombres à quatre décimales avant de commencer le calcul et après chaque opération, comme le fait un ordinateur.
- 4) Prouvez que l'inverse d'une matrice Δ inférieure est aussi une matrice triangulaire inférieure.