Analyse numérique I — Série 2 — SH 2008/2009

Echéance : 8 octobre, à midi

1) Soient $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculez $\|\mathbf{x}\|_p$ et $\|\mathbf{Ax}\|_p$ pour $p = 1,\, 2,\, \infty$.

b) Calculez $\|\mathbf{A}\|_1$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ et $\|\mathbf{A}\|_F$.

2) a) Prouvez que $\|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

b) Vérifiez pour $\mathbf{x}^T = [2, 4, -5, 0, 3]$.

3) Soit λ une EW réelle de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ qui possède un EV dont toutes les composantes sont non–négatives.

a) Montrez que λ est bornée par les sommes minimale et maximale des colonnes de $\mathbf{A}$:

$$\min_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \le \lambda \le \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}.$$

b) Discutez l'inégalité de droite en relation avec un résultat du cours.

4) Montrez que pour toute norme matricielle

a) $\|\mathbf{I}\| \ge 1$ (donnez des normes pour lesquelles $\|\mathbf{I}\| = 1$; calculez la norme de Frobenius de $\mathbf{I}$);

b) $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| \ge 1/\,\|\mathbf{A}\|$.

5) Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée d'ordre n.

a) déterminez, en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de $\mathbf{A}$, ceux de

i) $\mathbf{A}^m$ pour $m \ge 2$;

ii) $\mathbf{A}^{-1}$, en supposant $\mathbf{A}$ nonsingulière;

iii) $\mathbf{A} + \gamma\mathbf{I}$, $\gamma =$ constante.

b) Prouvez que pour une matrice quelconque $\mathbf{A}$ et une matrice unitaire $\mathbf{U}$ du même ordre

$$\|\mathbf{AU}\|_2 = \|\mathbf{UA}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \,.$$