Echéance: 1^{er} octobre, à midi

1) (sans ordinateur) Pour les nombres x et $\widehat{x}$ suivants, combien $\widehat{x}$ contient-il de chiffres significatifs de x ?

(a) $\widehat{x} = 451.023, \quad x = 451.01,$
(b) $\widehat{x} = -.045113, \quad x = -.04518,$
(c) $\widehat{x} = 23.4213, \quad x = 23.4604.$

2) Annulation (ordinateur) : En analyse numérique, on approche souvent des fonctions par leurs valeurs en un certain nombre (naturellement fini) de points de leur ensemble de définition. Des points très utilisés à cet effet sont les points équidistants d'une part, et les points de Čebyšev dans l'intervalle $[-1, 1]$ d'autre part. Soit $n + 1$ le nombre de points. Les points de Čebyšev de seconde espèce sont donnés par la formule

$$x_i = -\cos \frac{i}{n}\pi, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

(Ces points sont les projections verticales sur le diamètre de points équidistants sur un demi–cercle supérieur: essayez de vous les représenter géométriquement!)

Pour obtenir une *fonction* approchant f à partir de ses valeurs en x_i, on se sert souvent de l'interpolation. Lors du calcul de l'interpolant ou de sa dérivée par certains algorithmes, les différences entre points x_i consécutifs doivent être calculées.

Nous allons nous contenter ici d'approcher la dérivée première au point de gauche -1 par la définition (pente de la sécante, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ici $\frac{f(x_1)-f(-1)}{x_1-(-1)}$) pour n croissant (donc h décroissant). Ecrivez un programme qui calcule le quotient de différences pour n = 10, 100, 1000, 10000, etc, avec $x_1 = 2^{\text{ème}}$ point équidistant sur $[-1, 1]$ ainsi que pour $x_1 = 2^{\text{ème}}$ point de Čebyšev. Comparez le résultat avec la dérivée exacte de f au point -1. Que remarquez–vous concernant la décroissance de l'erreur pour une fonction non–triviale, comme $\tan(3x)$. Pour quel h l'erreur est elle minimale, dans chacun des cas ? (En fait, on peut montrer que l'erreur est en moyenne minimale pour $h \simeq \sqrt{\nu}$, où ν est la précision utilisée — voir Schwetlick/Kretzschmar, "Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure", Fachbuchverlag Leipzig, 1991, p. 171.)

3) Souillure ("smearing") (ordinateur) : la fonction

$$F(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

appelée **fonction d'erreur**, joue un rôle important en théorie des équations différentielles et en théorie des probabilités. Elle ne peut pas être calculée analytiquement. On pourrait penser l'approcher en développant e^{-t^2} en série exponentielle et intégrant terme par terme pour obtenir

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

où les a_{2n+1} satisfont à la relation de récurrence

$$a_1 = x, \qquad a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}(2n-1)}{n(2n+1)} x^2, \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

Déduisez (1). En utilisant (2) pour éviter que les nombres deviennent trop grands, calculez $F(3)$, $F(4)$ et $F(5)$ et comparez avec les valeurs exactes

$$\begin{aligned} F(3) &= 0.999977910 \\ F(4) &= 0.999999985 \\ F(5) &= 1.000000000. \end{aligned}$$

Imprimez l'erreur et l'erreur relative.

4) Stabilité de la multiplication (sans ordinateur): Soient $a = 0.2346$ et $b = 1.632$, et soit $x_c = \mathrm{fl}(a \cdot b)$ le produit de a et b calculé en arithmétique à 4 décimales avec arrondi. Trouvez $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ tels que $x_c = \tilde{a} \cdot \tilde{b}$, où $|\tilde{a} - a| \leq 5 \cdot 10^{-5}$, $|\tilde{b} - b| \leq 5 \cdot 10^{-5}$.